

ISABELLE BOUCHARD

**LIEUX DE SINGULARITÉ DES MANIPULATEURS  
PARALLÈLES À ACTIONNEMENT REDONDANT**

Mémoire  
présenté  
à la Faculté des études supérieures  
de l'Université Laval  
pour l'obtention  
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

MARS 2002

# Résumé

L'étude des lieux de singularité des manipulateurs parallèles à actionnement redondant ne peut être effectuée de façon classique. En effet, cela implique le calcul du déterminant de la matrice jacobienne du mécanisme, qui doit être carrée. Cette matrice est rectangulaire dans le cas de redondance.

Deux approches ont été utilisées pour résoudre ce problème : la multiplication de la matrice jacobienne et la méthode des parties. La première démarche permet de dégager une expression, dont le résultat est une matrice carrée qui doit être inversible. On obtient ainsi une équation d'expression assez simple, mais dont il est difficile d'extraire les racines. La deuxième technique consiste à obtenir le lieu de singularité par l'intersection des lieux de singularité de parties du mécanisme. Cette méthode est plus longue à appliquer, mais permet d'obtenir l'expression des lieux de singularité.

---

Isabelle Bouchard

---

Clément Gosselin

# Avant-propos

Grâce aux appuis que j'ai reçus, produire ce mémoire a été pour moi un travail très agréable. En effet, les bons conseils, la compréhension —notamment lors de ma grossesse— et l'enthousiasme de M. Clément M.Gosselin ont su rendre le climat humain et stimulant.

De plus, le soutien de mon époux Richard, qui comprend mon goût pour les études et sait partager les sacrifices que cela impose, m'a été indispensable. Enfin, la joie et la vitalité contagieuses de mes deux petits garçons, Benoît et Antoine, m'ont apporté toute l'énergie qui m'a été nécessaire.

Je vous remercie tous énormément.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte</b>	<b>2</b>
1.1 Manipulateurs parallèles à actionnement redondant . . . . .	2
1.2 Singularités . . . . .	3
1.3 Méthodologie . . . . .	5
1.3.1 Cas étudiés . . . . .	5
1.3.2 Démarche . . . . .	5
1.3.3 Critères d'évaluation . . . . .	5
<b>2 Manipulateur plan à 2 degrés de liberté</b>	<b>7</b>
2.1 Géométrie et modèle . . . . .	7
2.2 Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$ . . . . .	10
2.2.1 Approche . . . . .	10
2.2.2 Détail de la démarche . . . . .	10
2.2.3 Résultats . . . . .	13
2.3 Méthode des parties . . . . .	13
2.3.1 Approche . . . . .	13

2.3.2	Détail de la démarche . . . . .	14
2.3.2.1	Lieux de singularité des parties . . . . .	14
2.3.2.2	Racines communes . . . . .	15
2.3.3	Résultats . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Manipulateur plan à 3 degrés de liberté</b>	<b>16</b>
3.1	Géométrie et modèle du manipulateur . . . . .	17
3.2	Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne <b>A</b> . . . . .	20
3.2.1	Approche . . . . .	20
3.2.2	Détail de la démarche . . . . .	20
3.2.3	Résultats . . . . .	21
3.3	Méthode des parties . . . . .	21
3.3.1	Approche . . . . .	21
3.3.2	Détail de la démarche . . . . .	22
3.3.2.1	Lieux de singularité des parties . . . . .	22
3.3.2.2	Racines communes . . . . .	23
3.3.3	Résultats . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Manipulateur spatial à 6 degrés de liberté</b>	<b>26</b>
4.1	Géométrie et modèle . . . . .	27
4.2	Méthode des parties . . . . .	30
4.2.1	Approche . . . . .	30
4.2.2	Démarche . . . . .	31
4.2.2.1	Lieux de singularité des parties . . . . .	31
4.2.2.2	Racines communes . . . . .	31
4.2.3	Résultats . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>33</b>
5.1	Manipulateur à 2 ddl . . . . .	33
5.1.1	Cas avec singularité . . . . .	34
5.1.1.1	Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne <b>A</b>	35
5.1.1.2	Méthode des parties . . . . .	35
5.1.2	Cas sans singularité . . . . .	35
5.1.2.1	Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne <b>A</b>	36
5.1.2.2	Méthode des parties . . . . .	37
5.2	Manipulateurs à 3 ddl . . . . .	38
5.2.1	Cas avec singularités ponctuelles dans $xy$ . . . . .	39
5.2.1.1	Méthode des parties . . . . .	40

5.2.1.2	Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$	42
5.2.2	Cas avec droite de singularité dans $xy$	44
5.2.2.1	Méthode des parties	45
5.2.2.2	Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$	46
5.3	Manipulateurs à 6 ddl	48
5.3.1	Cas simplifié	48
<b>Conclusion</b>		<b>51</b>
<b>A Expression des coefficients</b>		<b>55</b>
A.1	Manipulateur à 2 degrés de liberté	55
A.1.1	Expression du déterminant de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$	55
A.2	Manipulateur à 3 degrés de liberté	56
A.2.1	Expression du déterminant de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$	56
<b>B Analyse de la valeur du signe de l'expression sous le radical dans l'équation 2.12</b>		<b>59</b>

# Liste des figures

2.1	Géométrie du manipulateur plan à 2ddl . . . . .	8
2.2	Division du mécanisme à 2ddl en parties : 1,2 et 3 . . . . .	14
3.1	Géométrie du manipulateur plan à 3ddl . . . . .	17
3.2	Division du mécanisme à 3ddl en parties . . . . .	22
4.1	Géométrie du manipulateur spatial à 6ddl . . . . .	27
5.1	Manipulateur plan à 2ddl, exemple 1 . . . . .	34
5.2	Lieux de singularité des parties, exemple 1 . . . . .	36
5.3	Position singulière, exemple 1 . . . . .	37
5.4	Manipulateur plan à 2ddl, exemple 2 . . . . .	38
5.5	Lieux de singularité des parties, exemple 2 . . . . .	38
5.6	Manipulateur plan à 3ddl, exemple 3 . . . . .	39
5.7	Lieux de singularité des parties, exemple 3 . . . . .	42
5.8	Position singulière, exemple 3 . . . . .	43
5.9	$f_3$ . . . . .	44
5.10	Manipulateur plan à 3ddl, exemple 4 . . . . .	45
5.11	Lieux de singularité des parties, exemple 4 . . . . .	46
5.12	Position singulière, exemple 4 . . . . .	47
5.13	Manipulateur à 6 ddl, exemple 6 . . . . .	48
5.14	Position singulière, exemple 6 . . . . .	50
B.1	Changement de repère . . . . .	61
B.2	$\frac{a}{R^4}$ . . . . .	62

B.3	$\frac{b}{R^5}$	62
B.4	$\frac{c}{R^6}$	63
B.5	$K$	63



# Introduction

Les manipulateurs parallèles à actionnement redondant présentent un intérêt certain. Ils possèdent une grande rigidité et une charge utile élevée par rapport à leur masse, tout comme les manipulateurs parallèles en général. De plus, ils présentent des lieux de singularité moins étendus que ces derniers.

Pour montrer cette caractéristique, l'étude des lieux de singularité des mécanismes à actionnement redondant sera effectuée. Les robots étudiés se limiteront à ceux comportant seulement des actionneurs prismatiques et dont le nombre d'actionneurs est supérieur de un au nombre de degrés de liberté. Les cas à 2, 3 et 6 degrés de liberté seront traités.

Les lieux de singularité sont connus pour les manipulateurs parallèles dont l'actionnement est classique. Leur détermination découle des cas où l'équation des vitesses du manipulateur dégénère. Cela se produit lorsque le déterminant de la matrice jacobienne de multiplication des vitesses cartésiennes est nul. Cependant, dans le cas présent, cette matrice jacobienne n'est pas carrée, il est donc impossible d'en extraire le déterminant. Deux méthodes seront abordées pour obtenir les cas où l'équation des vitesses n'est plus stable : la méthode de la multiplication de la matrice jacobienne et la méthode des parties.

# Chapitre 1

## Contexte

Avant de débiter l'analyse des lieux de singularité, il est nécessaire de présenter le contexte de cette étude. Les manipulateurs parallèles à actionnement redondant seront d'abord décrits, ce qui permettra d'en connaître les avantages. Ensuite, les lieux de singularité seront définis. Enfin, la méthodologie suivie pour le calcul des lieux de singularité sera présentée.

### **1.1 Manipulateurs parallèles à actionnement redondant**

Les manipulateurs parallèles diffèrent des manipulateurs sériels par la manière dont l'effecteur est relié à la base. Les robots sériels sont formés d'une suite de segments et

d'actionneurs placés bout à bout depuis la base jusqu'à l'effecteur. Les robots étudiés ici présentent quant à eux plusieurs chaînes cinématiques en parallèles, formant plusieurs "pattes" entre la base et l'effecteur.

Comparés aux manipulateurs sériels, ils offrent plusieurs avantages : rigidité, précision, charge utile très élevée par rapport à la masse du mécanisme, dimensions compactes, moteurs situés à la base du mécanisme. Cependant, ils offrent un petit espace de travail.

Ces mécanismes comportent des lieux de singularité qui limitent les possibilités de trajectoires pouvant être effectuées. En effet, ces lieux sont des régions à éviter par l'effecteur car, en ces points, le contrôle des vitesses du robot est perdu.

L'actionnement redondant est envisagé pour deux principales raisons. D'abord, cela permettrait de diminuer le nombre de configurations singulières, en vue d'obtenir un espace de travail maximum exempt de singularité. Ensuite, cela offrirait la possibilité d'un contrôle supplémentaire du manipulateur en force. Cependant, il faut s'attendre, avec ce type d'actionnement, à remarquer une diminution de l'espace de travail en raison des contraintes induites par les chaînes cinématiques additionnelles.

## 1.2 Singularités

Les mouvements d'un manipulateur sont observés dans l'espace cartésien. Ces mouvements sont donnés au manipulateur par les actionneurs, que l'on décrit dans l'espace articulaire. Donc, quand les actionneurs ont des vitesses  $\dot{\theta}$ , on doit pouvoir connaître les vitesses  $\dot{\mathbf{x}}$  que cela impose à l'effecteur dans toutes les directions. La correspondance entre ces deux mesures doit donc être établie, en vue d'imposer aux actionneurs les vitesses articulaires requises pour amener l'effecteur à se déplacer de la façon prescrite dans l'espace cartésien.

Cette relation prend la forme suivante, où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont les matrices jacobiennes du manipulateur :

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.1)$$

Dans certains cas, selon la position du manipulateur, cette relation n'amène plus de solution unique ou dégénère, c'est-à-dire qu'une entrée nulle amène une sortie non nulle ou vice-versa. Ces positions sont appelées les configurations singulières ou singularités du manipulateur. Les lieux de singularité regroupent toutes les configurations singulières d'un mécanisme.

Les singularités des manipulateurs parallèles se présentent sous trois formes distinctes. Les types rencontrés sont décrits par Gosselin et Angeles (1990). Essentiellement, les singularités sont classifiées de la manière suivante :

1. **type I** : La matrice  $\mathbf{B}$  est singulière. Ce type de singularité correspond généralement aux limites de l'espace atteignable. Dans cette situation, les vitesses cartésiennes peuvent être nulles pour des vitesses articulaires non nulles.

2. **type II** : La matrice  $\mathbf{A}$  est singulière. Dans ce cas, des vitesses cartésiennes non nulles peuvent être observées même si les actionneurs présentent des vitesses articulaires nulles.

3. **type III** : Ce type de singularité peut se produire uniquement dans des cas particuliers, quand le manipulateur possède une architecture particulière.

Le type de singularité qui sera étudié est celui attribué à la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , le type II. En effet, celui-ci est le plus difficile à étudier et le plus susceptible de causer des problèmes mécaniques au manipulateur, en raison de l'augmentation des forces internes.

Pour les manipulateurs parallèles non-redondants, le calcul de ces lieux est connu. Sefrioui et Gosselin (1994 et 1995) ainsi que Mayer St-Onge et Gosselin(1997) en ont développé l'expression pour les manipulateurs à trois degrés de liberté. La représentation et l'expression des lieux de singularité des manipulateurs parallèles à six degrés de liberté ont été établies par Mayer St-Onge (1997).

## 1.3 Méthodologie

### 1.3.1 Cas étudiés

Trois cas de manipulateurs parallèles à actionnement redondant seront étudiés. Tous ces cas ont un seul actionneur de plus que leur nombre de degrés de liberté. Ils comportent uniquement des actionneurs prismatiques. Ils se distinguent par leur nombre de degrés de liberté, soit 2, 3 et 6.

### 1.3.2 Démarche

L'expression analytique des lieux de singularité connue pour les manipulateurs parallèles non redondants ne peut s'appliquer directement aux manipulateurs redondants. En effet, cette expression découle du calcul du déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . En cas de redondance, cette matrice n'est pas carrée, son déterminant n'est donc pas défini. Pour chaque cas, deux approches seront étudiées pour résoudre ce problème.

La première, la méthode de la multiplication de la matrice, vient de manipulations algébriques de l'équation des vitesses. Elle permet de dégager une expression, dont le résultat est une matrice carrée qui doit être inversible pour maintenir la validité de la fonction.

La seconde, la méthode des parties, est basée sur la connaissance des lieux de singularités des manipulateurs non-redondants. On calcule d'abord les lieux de singularité des parties du mécanisme associé à des manipulateurs non-redondants. Ensuite, pour obtenir les lieux de singularité du manipulateur redondant, on prend l'intersection des lieux de singularités des parties.

### 1.3.3 Critères d'évaluation

Les expressions obtenues seront évaluées suivant trois critères. Premièrement, permettre de déterminer si un point est singulier. Ce résultat est peu intéressant, car pour

une utilisation concrète, il serait nécessaire de vérifier tous les points de toutes les trajectoires utilisées. Ensuite l'expression obtenue doit permettre de savoir quels seront les points singuliers pour un manipulateur donné. Ce résultat est plus utilisable que le précédent, puisqu'il décrit l'ensemble des positions singulières. Cependant, le meilleur résultat devrait conduire à des critères permettant de déterminer la géométrie d'un manipulateur pour éviter les singularités.

# Chapitre 2

## Manipulateur plan à 2 degrés de liberté

Le premier manipulateur traité comporte deux degrés de liberté. Bien que ce cas soit différent par sa simplicité, les deux méthodes envisagées pour résoudre le problème des lieux de singularité des manipulateurs parallèles redondants plus complexes seront abordées.

### 2.1 Géométrie et modèle

Le manipulateur étudié permet de positionner un effecteur dans le plan. Pour une tâche nécessitant deux degrés de liberté,  $x$  et  $y$ , le robot comporte trois actionneurs prismatiques. La figure 2.1 montre la disposition générale des différents éléments :

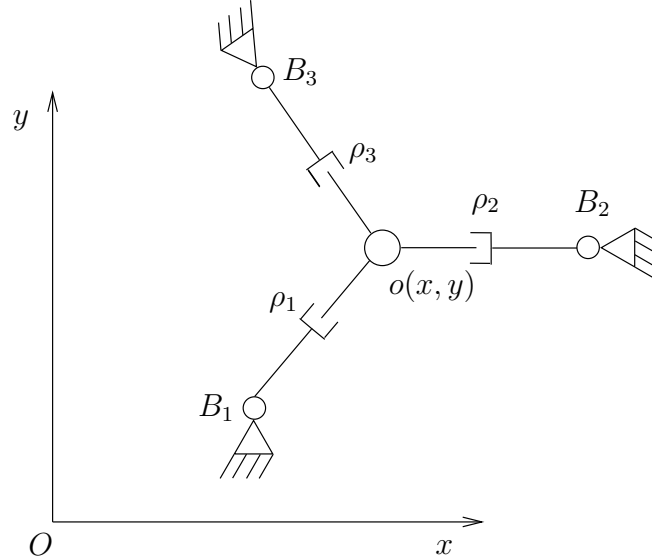


Figure 2.1: Géométrie du manipulateur plan à 2ddl

Les points  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  sont les points d'attache des segments à la base. Ces points sont fixes par rapport au repère. Les segments, comprenant chacun un actionneur prismatique, y sont reliés par des articulations rotoïdes passives. Le point  $\mathbf{o}$  désigne la position de l'effecteur. Les segments sont aussi attachés à l'effecteur par une articulation rotoïde passive.

Les positions des points d'attache des actionneurs à la base sont données par trois vecteurs  $\mathbf{b}_i$  :

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} B_{xi} \\ B_{yi} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.1)$$

La position du mécanisme est exprimée par un vecteur indiquant les coordonnées cartésiennes de l'effecteur.

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.2)$$

La longueur de chacun des segments  $\rho_i$  peut être calculée à l'aide des données



géométriques et de la position du robot.

$$\rho_i^2 = (x - B_{xi})^2 + (y - B_{yi})^2 \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.3)$$

La relation suivante, qui relie les vitesses articulaires aux vitesses cartésiennes est alors établie en dérivant l'équation précédente par rapport au temps et en regroupant le système d'équation sous forme vectorielle.

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.4)$$

Où  $\dot{\mathbf{x}}$  est le vecteur des vitesses cartésiennes et  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  celui des vitesses articulaires :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$ , respectivement de dimensions  $3 \times 3$  et  $3 \times 2$ , sont appelées les matrices jacobiennes du manipulateur.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (x - B_{x1}) & (y - B_{y1}) \\ (x - B_{x2}) & (y - B_{y2}) \\ (x - B_{x3}) & (y - B_{y3}) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Les problèmes associés aux lieux de singularité surviennent lorsque la relation entre les vitesses cartésiennes et articulaires n'apporte plus de solution unique ou dégénère.

## 2.2 Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$

### 2.2.1 Approche

Puisque la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas carrée, il n'est pas possible de procéder comme dans le cas classique, c'est-à-dire de déterminer les cas où la matrice  $\mathbf{A}$  est singulière. Par des manipulations algébriques effectuées à l'équation des vitesses, il est possible de mettre en évidence le cas où la relation n'est plus valide.

### 2.2.2 Détail de la démarche

En prémultipliant chaque partie de l'équation des vitesses  $\mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}}$  par  $\mathbf{A}^T$ , on obtient un groupe carré  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , tout en préservant l'égalité de la relation.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.9)$$

En isolant le vecteur  $\dot{\mathbf{x}}$ , on peut alors constater que le groupe  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  doit être inversible pour que la relation entre vitesses articulaires et cartésiennes soit maintenue. En d'autres termes, si le rang de  $\mathbf{A}$  est inférieur à 2, alors le déterminant de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  est nul et une singularité se produit.

Donc les lieux de singularité sont les positions pour lesquelles la relation suivante est vérifiée :

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 0 \quad (2.10)$$

Où  $\det(\ )$  est le déterminant de l'expression.

Cette expression est développée, puis les termes sont regroupés pour obtenir une équation de la forme suivante :

$$F_1 x^2 + F_2 y^2 + F_3 xy + F_4 x + F_5 y + F_6 = 0 \quad (2.11)$$

Le détail des expressions des coefficients est disponible à l'annexe A.

De cette formulation,  $y$  peut être isolé.

Si  $F_2$  est non nul :

$$y = \frac{-(F_3 x + F_5) \pm \sqrt{(F_3 x + F_5)^2 - 4 F_2 (F_1 x^2 + F_4 x + F_6)}}{2 F_2} \quad (2.12)$$

Trois cas peuvent être observés, selon la valeur de l'expression sous le radical.

D'abord, cette expression peut être négative, ce qui implique qu'aucune solution ne permet un déterminant nul pour  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , donc le manipulateur ne comporte pas de lieux de singularité.

Ensuite, le cas où l'expression sous le radical serait positif doit être écarté. En effet, de par la définition des constantes  $F_i$ , cela ne se produit jamais. (Ce constat est montré à l'annexe B)

Finalement l'expression sous le radical peut être nulle, ce qui signifie que certaines solutions conduisent à un déterminant nul de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . Des singularités se produisent alors lorsque l'effecteur est positionné sur un point de la droite représentée par l'équation suivante :

$$y = - \left( \frac{F_3}{2 F_2} \right) x + \left( \frac{F_5}{2 F_2} \right) \quad (2.13)$$

Il est possible de vérifier qu'il s'agit de l'équation d'une droite qui relie tous les points d'attache des segments. En posant :

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} B_{xi} \\ m B_{xi} + b \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 3 \quad (2.14)$$

On obtient  $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  nul pour les valeurs de  $y$  suivante :

$$y = m x + b \quad (2.15)$$

Soit des valeurs qui appartiennent à la droite formée par les points d'attache sur la base.

Si  $F_2$  est nul :

Il faut remarquer que  $F_2$  est nul seulement dans le cas où les trois actionneurs sont situés sur une même droite d'équation  $x = b$ , où  $b$  est une constante. Alors, les coefficients  $F_3$  et  $F_5$  sont aussi nuls. Les singularités dépendent alors seulement de  $x$ . En effet, l'équation 2.11 devient :

$$F_1 x^2 + F_4 x + F_6 = 0 \quad (2.16)$$

Où  $x$  peut être isolé :

$$x = \frac{-F_4 \pm \sqrt{F_4^2 - 4 F_1 F_6}}{2 F_1} \quad (2.17)$$

Si  $F_1 = 0$ , ces points d'attache des bases des segments seraient situés à la même coordonnée  $y$ , ce qui signifie que les trois segments seraient attachés au même point, ce qui présente peu d'intérêt.

En remplaçant les coefficients par leur valeur, on constate que l'expression sous le

radical vaut toujours 0 et que l'équation des lieux de singularité est simplifiée à :

$$x = b \tag{2.18}$$

Ce qui signifie qu'une singularité se produit lorsque l'effecteur est situé sur la même droite que les points d'attache de la base.

### 2.2.3 Résultats

Dans le cas des manipulateurs plans à deux degrés de liberté, cette méthode permet de vérifier, par l'équation 2.12, si un point est singulier. De plus, il est possible d'isoler une variable pour obtenir une expression analytique des lieux de singularités associés à un manipulateur.

Aussi, le résultat obtenu permet d'établir des critères visant à éviter les singularités. En effet, il a été montré qu'une singularité se produit uniquement si les points d'attache des segments à la base sont situés sur une même droite. En évitant cette disposition, le manipulateur obtenu ne comporte aucun lieu de singularité.

## 2.3 Méthode des parties

### 2.3.1 Approche

La méthode des parties consiste à considérer le robot en trois parties, constituées de robots parallèles plans non redondants à deux degrés de liberté. Les lieux de singularité de ces mécanismes sont connus. Ainsi, le mécanisme présenté à la figure 2.1 sera traité comme l'intersection des trois parties illustrées à la figure 2.2.

Chaque partie est nommée par l'actionneur qui n'est pas considéré. Ainsi, la partie 1 est celle où le segment 1 n'est pas pris en compte.

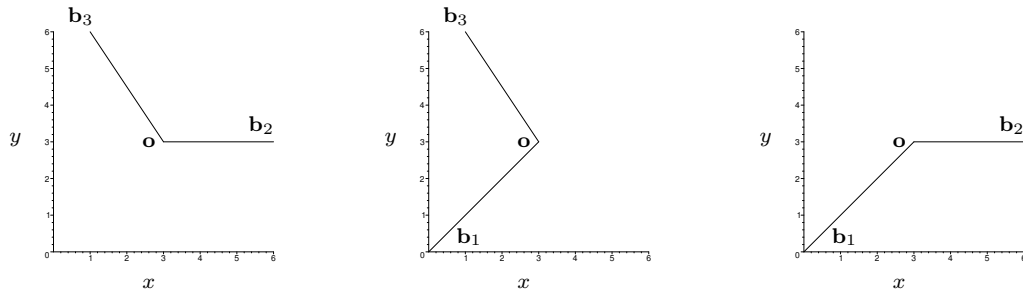


Figure 2.2: Division du mécanisme à 2ddl en parties : 1, 2 et 3

Le mécanisme global comportera une singularité dans une position où toutes les parties seraient en position singulière. La démarche à effectuer sera donc de calculer l'intersection des lieux de singularité de toutes les parties du manipulateur. Dans ce cas, le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  sera inférieur à 2.

## 2.3.2 Détail de la démarche

### 2.3.2.1 Lieux de singularité des parties

Chacune des parties présentées plus haut peut être associée à un manipulateur parallèle plan à deux degrés de liberté, non-redondant. La matrice jacobienne de chacune des parties a la forme carrée suivante :

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} (x - B_{xa}) & (y - B_{ya}) \\ (x - B_{xb}) & (y - B_{yb}) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Où  $a$  et  $b$  prennent les valeurs suivantes :  $a = 2$  et  $b = 3$  pour  $i = 1$ ,  $a = 1$  et  $b = 3$  pour  $i = 2$  et  $a = 1$  et  $b = 2$  pour  $i = 3$ .

Les lieux de singularité des parties se produisent donc lorsque leur matrice  $\mathbf{A}_i$  est singulière, soit lorsque le déterminant de  $\mathbf{A}_i$  est nul.

$$L_i = (-B_{ya} + B_{yb}) x + (B_{xa} - B_{xb}) y - B_{xa} B_{yb} + B_{xb} B_{ya} = 0 \quad (2.20)$$

Où  $a$  et  $b$  prennent les mêmes valeurs que précédemment.

### 2.3.2.2 Racines communes

Il s'agit de trois équations de droite. Chacune de ces droites passe par les deux points d'attache des segments à la base associés à la partie considérée. Aussi, chaque coordonnée d'un point d'attache d'un segment appartient à deux droites seulement. Pour qu'il y ait intersection de ces trois lieux de singularité, il est nécessaire que les trois droites soient confondues. En effet, une intersection ponctuelle de ces trois lieux impliquerait l'appartenance d'un point à trois droites.

Les singularités du manipulateur global surviennent donc lorsque les trois lieux sont confondus. Cela se produit lorsque les trois points d'attache des segments à la base sont alignés. L'équation des lieux de singularité est alors l'équation de la droite, exprimée par l'un ou l'autre des polynômes  $L_i$ .

### 2.3.3 Résultats

Cette méthode conduit aux mêmes résultats que l'approche de la multiplication de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . Cependant, cette dernière est plus simple dans le cas du manipulateur parallèle plan à 2 degrés de liberté.

Pour concevoir un manipulateur parallèle plan redondant à deux degrés de liberté qui ne comporte aucun lieu de singularité, il suffit de s'assurer que les points d'attache des segments à la base du robot ne soient pas colinéaires.

# Chapitre 3

## Manipulateur plan à 3 degrés de liberté

Pour faire suite au cas vu précédemment, le manipulateur plan à 3 degrés de liberté sera maintenant étudié. Ce robot comporte un degré de liberté supplémentaire en rotation, noté  $\phi$ .

La méthode basée sur la multiplication de la matrice Jacobienne  $\mathbf{A}$  et la méthode des parties seront de nouveau utilisées. Cependant, vu la lourdeur des expressions obtenues, les lieux de singularité seront calculés pour une valeur donnée de l'orientation  $\phi$  de l'effecteur. Il sera alors possible d'appliquer la démarche pour une série d'angles de rotation et ainsi avoir un aperçu des lieux de singularité dans l'espace  $(x, y, \phi)$ .



### 3.1 Géométrie et modèle du manipulateur

De façon générale, les mécanismes étudiés au cours de ce chapitre sont constitués d'une plate-forme reliée à une base par quatre segments. Tous les segments sont formés d'actionneurs prismatiques. Les points d'attache des segments, autant à la base qu'au niveau de la plate-forme, peuvent être quelconques. Ces attaches sont constituées d'articulations rotoïdes passives. La figure 3.1 montre la présentation de tels manipulateurs :

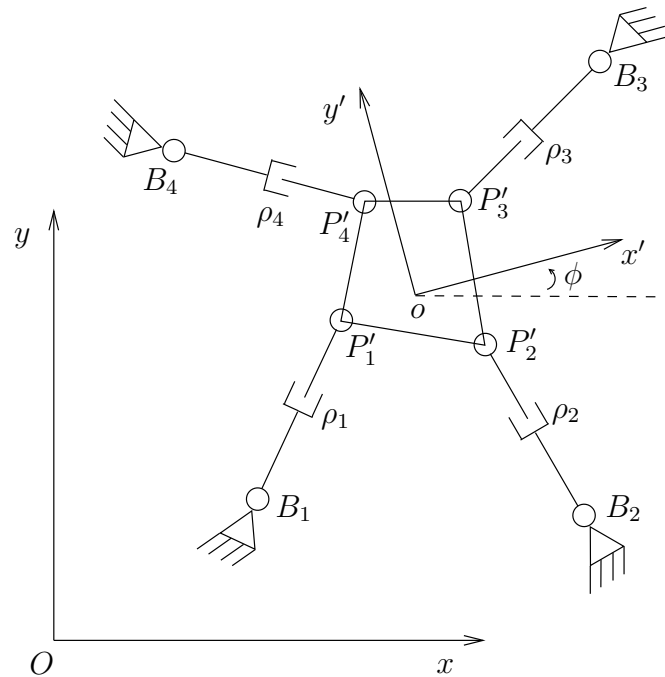


Figure 3.1: Géométrie du manipulateur plan à 3ddl

Deux repères permettent de décrire la géométrie et la position du mécanisme. Le premier,  $XOY$ , fixe par rapport à la base du manipulateur, permet de décrire la position des points d'attache des segments à la base. Le second,  $X'oY'$ , mobile, est attaché à la plate-forme. Il permet de situer les points d'attache des segments à l'effecteur quelque soit la position du robot. Le nom des coordonnées indique dans quel repère elles sont exprimées : un apostrophe suit le nom des valeurs mesurées dans le repère mobile.

Les données géométriques connues sont regroupées sous la forme de vecteurs :  $\mathbf{b}_i$  et  $\mathbf{p}'_i$ . Où  $\mathbf{b}_i$  contient les coordonnées du  $i$ -ième point d'attache à la base et  $\mathbf{p}'_i$  contient les coordonnées du  $i$ -ième point d'attache à l'effecteur.

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} B_{xi} \\ B_{yi} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{p}'_i = \begin{bmatrix} P'_{xi} \\ P'_{yi} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.2)$$

Ces manipulateurs permettent trois degrés de liberté : 2 translations dans le plan,  $x$  et  $y$ , ainsi qu'une rotation,  $\phi$ . Ces trois variables sont nécessaires et suffisantes pour décrire la position de l'effecteur du robot.

L'origine du repère mobile est mesurée dans le repère fixe :

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La rotation du repère mobile par rapport au repère fixe est décrite par l'angle  $\phi$ . La matrice de rotation du système peut donc être écrite de la manière suivante :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

À l'aide de la position de l'origine du repère mobile  $\mathbf{o}$  et de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$  la position de tous les points peut être calculée :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{o} + \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.5)$$

À partir de ces coordonnées cartésiennes, les coordonnées articulaires, soit les longueurs des actionneurs prismatiques  $\rho_i$ , sont calculées.

$$\rho_i^2 = (x + \cos(\phi)P'_{xi} - \sin(\phi)P'_{yi} - B_{xi})^2 + (y + \sin(\phi)P'_{xi} + \cos(\phi)P'_{yi} - B_{yi})^2 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.6)$$

Finalement, le système d'équations qui établit le lien entre les vitesses articulaires et cartésiennes est obtenu en dérivant par rapport au temps l'équation précédente.

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.7)$$

Où  $\dot{\mathbf{x}}$  est le vecteur des vitesses cartésiennes et  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  celui des vitesses articulaires :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Les dimensions des matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  sont respectivement  $4 \times 4$  et  $4 \times 3$ .

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
a_{i1} &= x + P'_{xi} \cos(\phi) - P'_{yi} \sin(\phi) - B_{xi} \\
a_{i2} &= y + P'_{xi} \sin(\phi) + P'_{yi} \cos(\phi) - B_{yi} \\
a_{i3} &= (P'_{yi} \sin(\phi) - x - P'_{xi} \cos(\phi) + B_{xi})(P'_{yi} \cos(\phi) + P'_{xi} \sin(\phi)) \\
&\quad + (y + P'_{xi} \sin(\phi) + P'_{yi} \cos(\phi) - B_{yi})(P'_{xi} \cos(\phi) - P'_{yi} \sin(\phi))
\end{aligned}$$

## 3.2 Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$

### 3.2.1 Approche

L'approche est la même que celle décrite au chapitre précédent. C'est-à-dire que la relation entre les vitesses cartésiennes et articulaires est manipulée algébriquement en vue de faire ressortir les cas où elle dégénère.

### 3.2.2 Détail de la démarche

En prémultipliant l'équation 3.7 par  $\mathbf{A}^T$ , on obtient :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.12)$$

Cette écriture permet de mettre en évidence le cas où la relation ne comporte pas de solution. En effet, si le groupe  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  n'est pas inversible, le système d'équations de vitesses ne peut pas se résoudre et il y aura singularité. Ainsi, les singularités se produiront lorsque l'équation suivante sera vérifiée.

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 0 \quad (3.13)$$

À partir de la définition de la matrice  $\mathbf{A}$  et par des manipulations algébriques simples, la forme suivante est dégagée :

$$\begin{aligned}
 F_1 x^4 + F_2 y^4 + F_3 x^3 y + F_4 x y^3 + F_5 x^2 y^2 + F_6 x^3 + F_7 y^3 + F_8 x^2 y & \quad (3.14) \\
 + F_9 x y^2 + F_{10} x^2 + F_{11} y^2 + F_{12} x y + F_{13} x + F_{14} y + F_{15} = 0 &
 \end{aligned}$$

Les valeurs des coefficients sont donnés en Annexe A. La lourdeur des coefficients amène à fixer  $\phi$ .

### 3.2.3 Résultats

Comme dans le cas du manipulateur à deux degrés de liberté, cette méthode permet de vérifier aisément si un point est singulier. Par contre, étant donné que l'expression obtenue est un polynôme de degré 4, il est difficile d'en extraire algébriquement les racines pour trouver quel point est singulier. De plus, le nombre de termes apparaissant dans les coefficients ne permet pas de dégager des critères de conception.

## 3.3 Méthode des parties

### 3.3.1 Approche

Cette méthode consiste à considérer le manipulateur plan redondant comme l'union de plusieurs manipulateurs non-redondants. De la même manière que dans le cas du manipulateur à 2 ddl, le système sera divisé en parties associées à des manipulateurs non-redondants. Ainsi, le mécanisme général, présenté à la figure 3.1 sera traité comme l'union des quatre mécanismes montrés à la figure 3.2.

On reprend pour chaque partie l'approche utilisée pour obtenir l'équation des lieux de singularité de manipulateurs parallèles plans non-redondants, telle que développée par Sefrioui et Gosselin (1995) et par Mayer St-Onge (1997). Ensuite, on détermine les

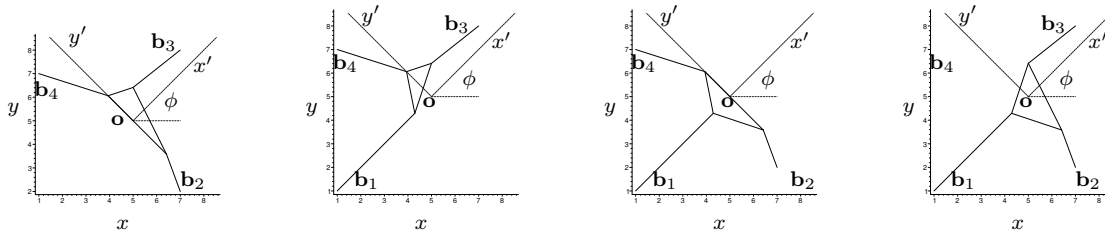


Figure 3.2: Division du mécanisme à 3ddl en parties

solutions communes à toutes ces composantes, qui forment la solution pour le manipulateur global.

### 3.3.2 Détail de la démarche

#### 3.3.2.1 Lieux de singularité des parties

Premièrement, pour les manipulateurs comprenant 3 degrés de liberté, la formation de 4 parties est nécessaire. La matrice jacobienne  $\mathbf{A}_i$  de chacune de ces parties peut être obtenue à partir d'une sous-matrice de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  du manipulateur global.  $\mathbf{A}_i$  est donc une matrice de dimension  $3 \times 3$  provenant du retrait de la ligne  $i$  de  $\mathbf{A}$ .

La  $i$ -ième partie comportera un lieu de singularité lorsque le déterminant de  $\mathbf{A}_i$  sera nul. On obtient alors 4 équations de la forme suivante, où  $i$  prend les valeurs de 1 à 4 :

$$L_i = E_{1i}x^2 + E_{2i}y^2 + E_{3i}yx + E_{4i}x + E_{5i}y + E_{6i} \quad (3.15)$$

Les expressions des coefficients sont donnés par Mayer St-Onge et Gosselin (1997).

Pour que les équations obtenues soient traitables, il est plus pratique de fixer l'orientation de la plate-forme.

### 3.3.2.2 Racines communes

Une singularité se produira pour le mécanisme global lorsque toutes les parties présenteront des singularités. Il s'agit donc pour obtenir le résultat souhaité, de déterminer les racines communes des quatre polynômes précédents.

La méthode du résultant peut être employée pour obtenir ces intersections. Elle est valable pour des équations de la forme  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  et  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ , où  $a_n \neq 0$  et  $b_m \neq 0$ . Le résultant de  $f(x)$  et  $g(x)$  est nul si et seulement si les deux fonctions ont des racines communes. Le résultant est obtenu par le déterminant d'une matrice de dimension  $(m+n) \times (m+n)$  formée de la manière suivante à partir des coefficients des deux équations à comparer :

$$\mathbf{M}_{f,g} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Pour appliquer cette méthode aux équations que l'on a obtenues, il faut d'abord les considérer comme des polynômes à une seule variable :

$$L_i = E_{1i}x^2 + (E_{3i}y + E_{4i})x + (E_{5i}y + E_{6i} + E_{2i}y^2) \quad (3.17)$$

Dans le cas général, la matrice de travail sera donc au maximum de dimension  $4 \times 4$ . Dans ce cas, elle prendra la forme suivante pour comparer les lieux des parties  $i$  et  $j$  :

$$\mathbf{M}_{i,j} = \begin{bmatrix} E_{1i} & E_{4i} + E_{3i}y & E_{6i} + E_{5i}y + E_{2i}y^2 & 0 \\ 0 & E_{1i} & E_{4i} + E_{3i}y & E_{6i} + E_{5i}y + E_{2i}y^2 \\ E_{1j} & E_{4j} + E_{3j}y & E_{6j} + E_{5j}y + E_{2j}y^2 & 0 \\ 0 & E_{1j} & E_{4j} + E_{3j}y & E_{6j} + E_{5j}y + E_{2j}y^2 \end{bmatrix}$$

Il est important de noter que cette matrice de calcul est valide uniquement dans le cas où  $E_{1i} \neq 0$ . Auquel cas il est nécessaire de former la matrice de calcul appropriée, de dimension  $3 \times 3$  ou  $2 \times 2$ .

Puisque l'on peut comparer les polynômes seulement deux à deux avec cette méthode, il y a, à partir des quatre équations de lieux de singularité des parties, un total de 6 possibilités de résultants à évaluer. Or, étant donné qu'il est nécessaire que les 4 courbes passent par un point commun, il est utile de vérifier seulement 2 paires d'équations, chacune des équations étant évaluée une seule fois. En effet, si à un même point les courbes  $a$  et  $b$  se croisent, ainsi que les courbes  $c$  et  $d$ , nécessairement  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  ont ce point en commun. Par exemple, les combinaisons 1-2 et 3-4 ou 1-3 et 2-4 sont acceptables.

Ensuite, il faut poser les résultants des polynômes égaux à 0. Deux équations au maximum de degré 4 en  $y$  ayant la forme suivante sont alors obtenues :

$$res_{i,j} = S_{1i,j}y^4 + S_{2i,j}y^3 + S_{3i,j}y^2 + S_{4i,j}y + S_{5i,j} = 0$$

$$i = 1, \dots, 2 \quad j = 3, \dots, 4 \quad (3.18)$$

Chacune de ces équations comporte au maximum 4 racines  $y$  distinctes. Puisque les deux paires de courbes doivent s'intersecter au même point, on ne retient que les solutions communes aux deux équations.

Chaque valeur de  $y$  qui satisfait la condition précédente est ensuite substituée dans chacune des quatre équations des lieux de singularités des parties. Pour chaque équation, les valeurs de  $x$ , deux au maximum, correspondantes à chaque valeur de  $y$  sont calculées. Pour chaque  $y$  retenu, seules les valeurs de  $x$  qui sont solutions des quatre polynômes sont retenues.



Pour obtenir une représentation complète des lieux de singularité, la démarche précédente doit être appliquée pour une série d'angles de rotation. La représentation sera alors un nuage de points formant au plus quatre courbes spatiales dans l'espace  $(x, y, \phi)$ .

### 3.3.3 Résultats

Les résultats obtenus permettent de déterminer si un point est singulier. Ils permettent aussi de décrire les lieux de singularité d'un mécanisme. Par contre, il est difficile d'en dégager des critères de conception permettant d'éviter les singularités. On remarque simplement que, comme dans le cas du manipulateur parallèle plan à actionnement non redondant, les singularités se produisent lorsque tous les segments se croisent en un même point.

Il faut remarquer que la redondance amène ici un avantage : les lieux de singularités sont réduits d'une dimension. En effet, Sefrioui et Gosselin (1995) ont montré que les lieux de singularité des manipulateurs parallèles à trois degrés de liberté et trois actionneurs sont représentés par des surfaces dans l'espace  $(x, y, \phi)$ . Avec l'ajout d'un actionneur, ces lieux sont maintenant formés de courbes.

# Chapitre 4

## Manipulateur spatial à 6 degrés de liberté

L'étude des lieux de singularité des manipulateurs à actionnement redondant à 6 degrés de liberté sera traitée suite à l'expression des lieux de singularité des robots plans vue aux chapitres précédents.

La méthode de la multiplication de la matrice jacobienne ne sera pas reprise pour les manipulateurs à 6 degrés de liberté, en raison de la lourdeur des coefficients escomptés et du degré élevé du polynôme qui en découlerait. La méthode des parties sera donc la seule envisagée.

Comme pour le cas à 3 degrés de liberté, l'orientation de l'effecteur sera fixée.

## 4.1 Géométrie et modèle

Ce robot redondant à 6 degrés de liberté comporte 7 actionneurs prismatiques. Ceux-ci sont situés sur chacun des 7 segments qui relient la base du mécanisme à l'effecteur. Tous les segments sont attachés à l'effecteur par des articulations sphériques passives et à la base par des liaisons de cardan passives. La figure 4.1 montre cette disposition des éléments.

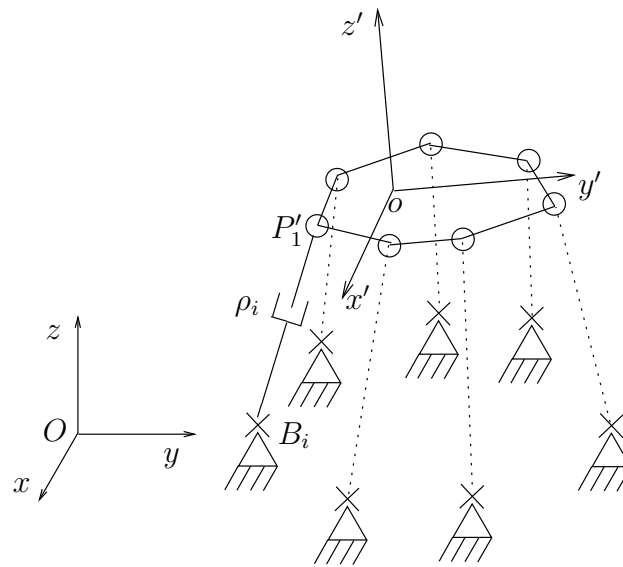


Figure 4.1: Géométrie du manipulateur spatial à 6ddl

Le manipulateur est décrit à l'aide de deux repères. L'un est attaché à la base, l'autre à l'effecteur. Le premier, le repère fixe, permet de mesurer la position du robot dans son environnement. C'est dans ce repère que seront décrites les trajectoires à suivre par l'effecteur. Le second, le repère mobile, est utilisé pour exprimer la position de tout point de l'effecteur, indépendamment de la configuration du robot. La même notation que celle utilisée au chapitre précédent sera utilisée.

Le vecteur  $\mathbf{b}_i$  indique la position des points d'attache des segments à la base par rapport à l'origine du repère fixe.

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} B_{xi} \\ B_{yi} \\ B_{zi} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4.1)$$

Les positions des points d'attache de ces segments à l'effecteur par rapport à l'origine du repère mobile sont données par les vecteurs  $\mathbf{p}'_i$  :

$$\mathbf{p}'_i = \begin{bmatrix} P'_{xi} \\ P'_{yi} \\ P'_{zi} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4.2)$$

La rotation du repère mobile par rapport au repère fixe est décrite par les angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ , selon la convention  $\mathbf{Q}_z, \mathbf{Q}_y, \mathbf{Q}_x$  à partir desquels la matrice de rotation est construite :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi \\ c\theta s\psi & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Où  $c\theta$  et  $s\theta$  représentent le cosinus et le sinus de l'angle  $\theta$ .

La position de l'origine du repère mobile est donnée par  $\mathbf{o}$  :

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

À l'aide de ces informations, la position de tout point mesurée dans le repère mobile peut être exprimée dans le repère fixe :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{o} + \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4.5)$$

À partir de ces coordonnées cartésiennes, les coordonnées articulaires, représentant les longueurs des actionneurs prismatiques  $\rho_i$ , sont calculées.

$$\rho_i^2 = (\mathbf{o} + \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i)^T (\mathbf{o} + \mathbf{Q}\mathbf{p}'_i - \mathbf{b}_i) \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4.6)$$

Le système d'équations qui établit le lien entre les vitesses articulaires et cartésiennes est alors établi, en dérivant par rapport au temps l'équation précédente, puis en regroupant sous forme matricielle le système d'équations obtenu.

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.7)$$

Où  $\dot{\mathbf{x}}$  est le vecteur des vitesses cartésiennes et  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  celui des vitesses articulaires :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_3 \\ \dot{\rho}_4 \\ \dot{\rho}_5 \\ \dot{\rho}_6 \\ \dot{\rho}_7 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  sont les matrices jacobiennes du manipulateur, dont les dimensions sont respectivement  $7 \times 7$  et  $7 \times 6$ .

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_7 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_3^T \\ \mathbf{c}_4^T \\ \mathbf{c}_5^T \\ \mathbf{c}_6^T \\ \mathbf{c}_7^T \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Où  $\mathbf{c}$  est un vecteur de dimension 6, défini de la manière suivante :

$$\mathbf{c}_i^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i) \\ (\mathbf{Q} \mathbf{p}'_i) \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4.12)$$

## 4.2 Méthode des parties

### 4.2.1 Approche

La matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  du manipulateur est rectangulaire, ainsi son déterminant n'est pas défini. Il est possible de décomposer cette matrice en 7 sous-matrices de dimension  $6 \times 6$  en supprimant tour à tour chacune des lignes de  $\mathbf{A}$ . Cela équivaut à 7 manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté non redondants, formés à partir du robot étudié auquel on retire un segment. Ces 7 mécanismes sont désignés comme des parties du manipulateur étudié. Le lieu de singularité cherché est l'intersection des lieux de

singularité des parties obtenues, c'est-à-dire les points où toutes les sous-matrices ont un déterminant nul.

## 4.2.2 Démarche

### 4.2.2.1 Lieux de singularité des parties

L'expression des lieux de singularité des manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté à actionnement non-redondant a été développée par Mayer St-Onge (1997). Cette expression découle du développement cascadié du déterminant de la matrice jacobienne. Cette méthode sera appliquée pour toutes les sous-matrices  $\mathbf{A}_i$ . Les lieux de singularité de chacune des parties sont donc exprimés par :

$$\begin{aligned}
 L_i = & F_{1i}x^3 + F_{2i}x^2y + F_{3i}x^2z + F_{4i}x^2 + F_{5i}xy^2 + F_{6i}xyz + \\
 & F_{7i}xy + F_{8i}xz^2 + F_{9i}xz + F_{10i}x + F_{11i}y^3 + \\
 & F_{12i}y^2z + F_{13i}y^2 + F_{14i}yz^2 + F_{15i}yz + \\
 & F_{16i}y + F_{17i}z^3y + F_{18i}z^2 + \\
 & F_{19i}z + F_{20i} = 0
 \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4.13)$$

Les coefficients  $F_1$  à  $F_{20}$  sont tels que décrits par Mayer St-Onge (1997). Pour une orientation fixée et une géométrie connue, il s'agit de constantes.

### 4.2.2.2 Racines communes

Pour obtenir les racines communes de ces sept équations (4.13), il est plus simple de comparer d'abord trois équations, ensuite trois suivantes pour finalement s'assurer que la dernière équation passe aussi par les intersections trouvées.

Pour traiter les équations trois par trois, la méthode du résultant, telle que décrite au chapitre précédent peut être employée. Pour chaque triplet, deux matrices de calcul de dimension maximum  $6 \times 6$  sont formées. Évidemment, l'une des équations est utilisée deux fois, il est préférable de choisir pour cela l'équation au plus petit degré quand c'est

possible.

On obtient alors deux polynômes résultants de degré 9 au maximum à deux variables. La méthode du résultant peut être employée à nouveau pour connaître les intersections de ces équations. Cependant, si aucune simplification ne s'est produite, la matrice de calcul peut avoir au maximum les dimensions  $18 \times 18$ . Ces matrices sont très lourdes à traiter et conduisent à des coefficients d'un ordre très élevé, ce qui peut amener de l'imprécision dans les résultats.

Dans ce cas, fixer la coordonnée  $z$  constitue un bon compromis. Bien que cela n'apporte pas d'expression analytique, cela permet d'avoir un aperçu des lieux de singularités.

### 4.2.3 Résultats

La méthode permet de vérifier si un point est singulier, en l'insérant dans chacune des équations de lieu des parties.

À moins d'être appliquée à un cas dont la géométrie simplifie l'expression des lieux de singularité des parties, il est difficile d'appliquer cette technique pour obtenir les lieux de singularité d'un manipulateur donné.

Enfin, ce type de calcul ne met pas en évidence des critères de conception.



# Chapitre 5

## Exemples numériques

Pour illustrer différents cas rencontrés, des exemples de calcul de lieux de singularités sont présentés. Pour le détail des démarches utilisées, il faut se reporter aux chapitres précédents.

### 5.1 Manipulateur à 2 ddl

La première série d'exemples traite des manipulateurs plans à actionnement redondant qui permettent deux degrés de liberté.

### 5.1.1 Cas avec singularité

Cet exemple présente le cas où les points d'attache des segments à la base sont situés sur une droite. On s'attend donc à obtenir des positions singulières lorsque l'effecteur du robot est positionné sur cette même droite.

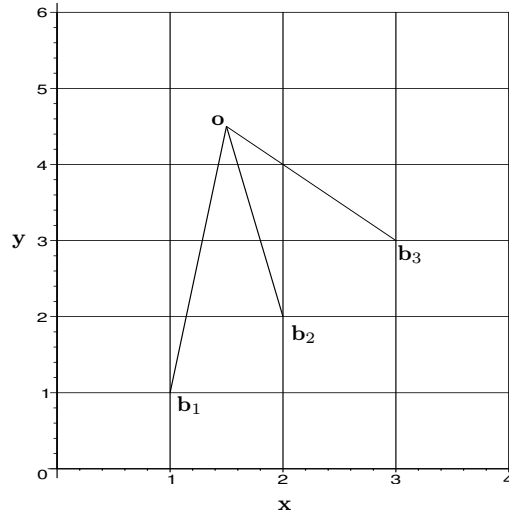


Figure 5.1: Manipulateur plan à 2ddl, exemple 1

Les positions des points d'attache des segments à la base, éléments de la droite  $x = y$  sont :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  du manipulateur est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (x-1) & (y-1) \\ (x-1) & (y-2) \\ (x-3) & (y-3) \end{bmatrix}$$

### 5.1.1.1 Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$

Par la méthode de la multiplication de la matrice jacobienne, l'équation suivante est obtenue :

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 6x^2 - 12xy + 6y^2 = 0$$

En isolant  $y$ , la forme attendue pour les lieux de singularité est obtenue, soit :

$$y = x$$

### 5.1.1.2 Méthode des parties

La méthode des parties conduit à la formation des trois polynômes suivants, le  $i$ -ième étant celui où le segment  $i$  n'est pas considéré :

$$L_1 = -x + y = 0$$

$$L_2 = -x + y = 0$$

$$L_3 = -2x + 2y = 0$$

Il apparait évident qu'il s'agit dans les trois cas de la même droite, dont l'équation est celle attendue,  $y = x$ . Celle-ci est présentée à la figure 5.2.

Le robot est représenté à la figure 5.3 dans l'une de ses positions singulières :

## 5.1.2 Cas sans singularité

Le deuxième exemple montre un manipulateur à deux degrés de liberté qui ne présente pas de singularité. Le schéma du robot est présenté à la figure 5.4.

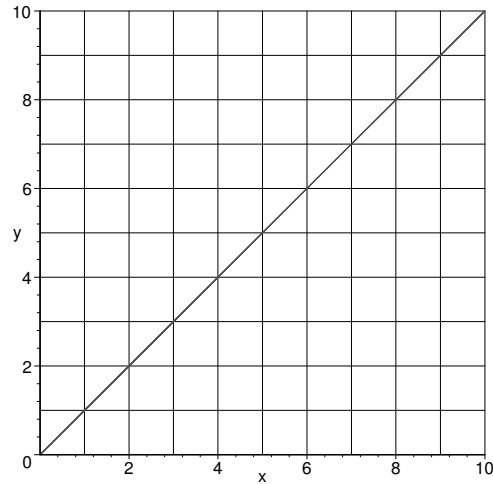


Figure 5.2: Lieux de singularité des parties, exemple 1

Les points d'attache des segments à la base sont les suivants :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{A}$  du manipulateur est :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (x-4) & (y-1) \\ (x-1) & (y-4) \\ (x-6) & (y-2) \end{bmatrix}$$

### 5.1.2.1 Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$

Par la méthode de la multiplication de la matrice jacobienne, l'équation suivante est obtenue :

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 14x^2 + 34xy - 182x + 38y^2 - 302y + 713 = 0$$

En isolant  $y$ , nous avons :

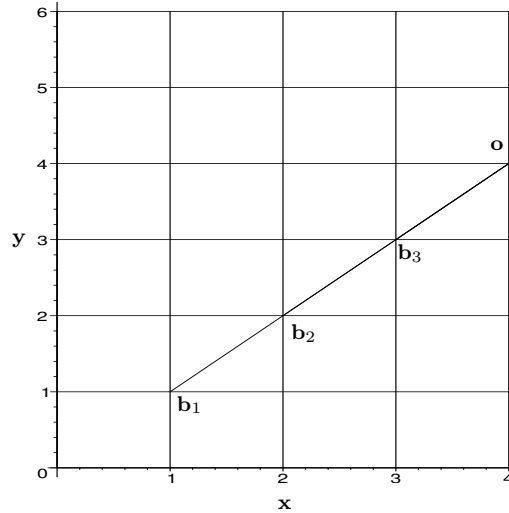


Figure 5.3: Position singulière, exemple 1

$$y = \frac{17}{38}x + \frac{151}{38} \pm \frac{9}{38} \sqrt{-3x^2 + 22x - 53}$$

La partie sous le radical est toujours négative. En effet, la valeur maximum de  $-3x^2 + 22x - 53$  est  $-\frac{38}{3}$ . (Lorsque  $x$  vaut  $\frac{22}{6}$ )

Ainsi, comme l'équation ne comporte pas de solution, il n'y a aucun lieu de singularité.

### 5.1.2.2 Méthode des parties

La méthode des parties peut aussi montrer ce résultat. Les lieux de singularité des parties peuvent être exprimées par les équations suivantes,  $L_i$  étant associé à la partie  $i$  du manipulateur, où le segment  $i$  est omis.

$$L_1 = -3x - 3y + 15 = 0$$

$$L_2 = 2x + 5y - 22 = 0$$

$$L_3 = -x + 2y + 2 = 0$$

Comme le montre la figure 5.5, aucun point n'est commun aux trois droites. Ce

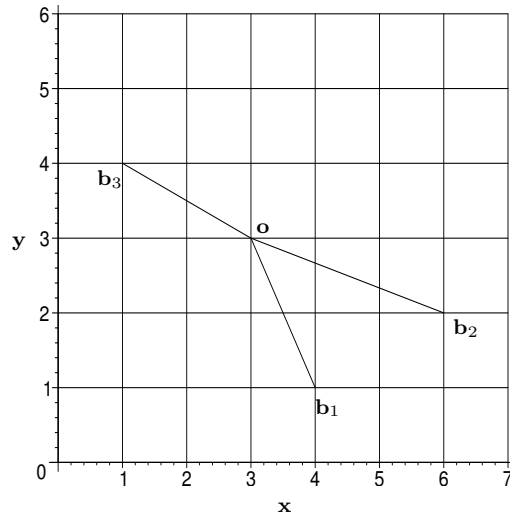


Figure 5.4: Manipulateur plan à 2ddl, exemple 2

manipulateur ne comporte donc aucun lieu de singularité.

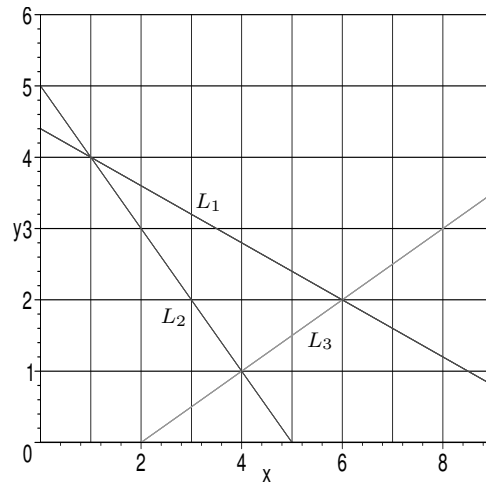


Figure 5.5: Lieux de singularité des parties, exemple 2

## 5.2 Manipulateurs à 3 ddl

La deuxième série d'exemples concerne les manipulateurs parallèles plans à actionnement redondant qui permettent 3 degrés de liberté.

### 5.2.1 Cas avec singularités ponctuelles dans $xy$

Voici le schéma représentant le robot traité dans le troisième exemple :

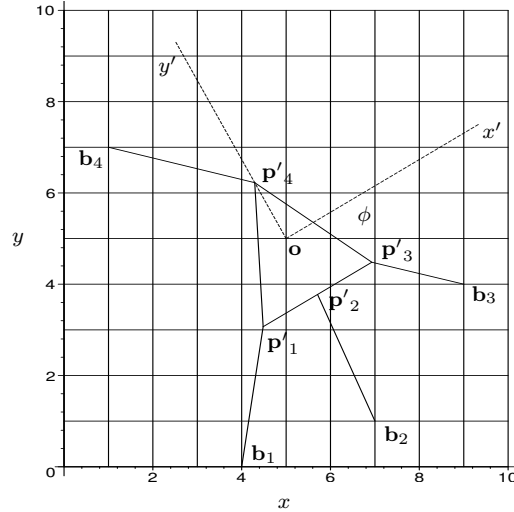


Figure 5.6: Manipulateur plan à 3ddl, exemple 3

Les points d'attache des segments à la base sont décrits par les vecteurs suivants :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Les points d'attache des segments à la plate-forme sont mesurés par rapport à l'origine du repère mobile et décrits par les vecteurs suivants :

$$\mathbf{p}'_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}'_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}'_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

L'angle de la plate-forme pour lequel les lieux de singularité seront calculés est choisi arbitrairement :

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

### 5.2.1.1 Méthode des parties

Le première étape de l'application de la méthode des parties consiste à déterminer les lieux de singularité de toutes les parties. En appliquant la technique connue pour calculer les lieux de singularité des manipulateurs parallèles non redondants, on obtient les polynômes suivants :

$$L_1 = 2y^2 + 2xy - 8x - 24y + 64 = 0$$

$$L_2 = -2x^2 + y^2 - 3xy + 34x + 6y - 96 = 0$$

$$L_3 = -4x^2 - 4xy + 48x + 16y - 128 = 0$$

$$L_4 = -2x^2 + y^2 + xy + 18x - 10y - 32 = 0$$

Pour connaître les régions communes à ces quatre courbes, la technique du résultant est employée. Les déterminants des deux matrices suivantes sont calculés :

$$M_{1,2} = \begin{bmatrix} -8 + 2y & 2y^2 - 24y + 64 & 0 \\ 0 & -8 + 2y & 2y^2 - 24y + 64 \\ -2 & 34 - 3y & y^2 + 6y - 96 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,2} = \begin{bmatrix} -4 & 48 - 4y & 16y - 128 & 0 \\ 0 & -4 & 48 - 4y & 16y - 128 \\ -2 & 18 + y & y^2 - 10y - 32 & 0 \\ 0 & -2 & 18 + y & y^2 - 10y - 32 \end{bmatrix}$$

Les deux fonctions en découlant, soit les résultants, sont :

$$res_{1,2} = 8y^4 - 144y^3 + 960y^2 - 2816y + 3072 = 0$$

$$res_{3,4} = -32y^4 + 384y^3 - 1664y^2 + 3072y - 2048 = 0$$

Les ensembles solutions de ces équations sont respectivement :



$$\text{Solutions } Y_{1..2} = \{4, 4, 4, 6\}$$

$$\text{Solutions } Y_{3..4} = \{2, 2, 4, 4\}$$

La seule valeur de  $y$  commune aux quatre courbes est donc 4. Les quatre lieux des parties  $L_i$  sont évalués à cette valeur :

$$\begin{aligned} L_1 \Big|_{y=4} &= 0 \\ L_2 \Big|_{y=4} &= -2x^2 + 22x - 56 = 0 \\ L_3 \Big|_{y=4} &= -4x^2 + 32x - 64 = 0 \\ L_4 \Big|_{y=4} &= -2x^2 + 22x - 56 = 0 \end{aligned}$$

Les racines de ces polynômes sont :

$$\text{Solutions } X_1 = \{x\}$$

$$\text{Solutions } X_2 = \{4, 7\}$$

$$\text{Solutions } X_3 = \{4, 4\}$$

$$\text{Solutions } X_4 = \{4, 7\}$$

La seule valeur de  $x$  commune aux quatre courbes évaluées à  $y = 4$  est donc 4.

Le point singulier  $\mathbf{s}$  est donc  $(4, 4)$ . Ce point correspond, comme le montre la figure 5.7, à la seule intersection de toutes les courbes de lieux de singularité des parties.

La figure 5.8 montre que lorsque le manipulateur est dans sa position singulière, les quatre segments se croisent en un point.

Il faut noter que, bien qu'il soit représenté comme un point dans le plan  $xy$ , le lieu de singularité de ce manipulateur est formé d'au moins une et au plus quatre courbes dans l'espace  $(x, y, \phi)$ .

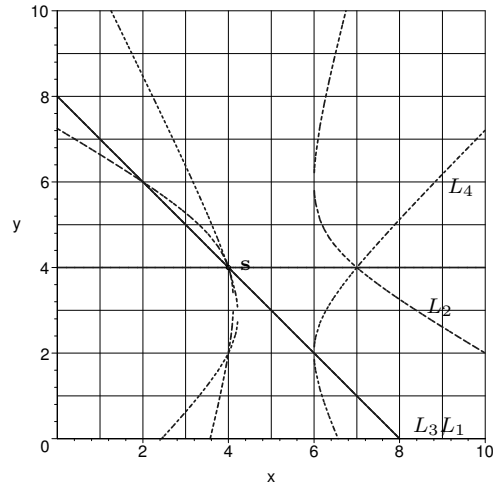


Figure 5.7: Lieux de singularité des parties, exemple 3

### 5.2.1.2 Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne $\mathbf{A}$

La méthode de la multiplication de la matrice jacobienne amène à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = & 24x^4 + 6y^4 + 40x^3y + 4y^3x + 22y^2x^2 - \\ & 592x^3 - 104y^3 - 696yx^2 - 208y^2x + \\ & 5384x^2 + 968y^2 + 3760xy - \\ & 20992x - 7680y + 30720 = 0 \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont données par :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{6} + \frac{13}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{a} \pm \frac{1}{6}\sqrt{b} \\ y &= -\frac{1}{6} + \frac{13}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{a} \pm \frac{1}{6}\sqrt{c} \end{aligned}$$

Où  $b$  et  $c$  sont des fonctions de  $a$ , elle-même une fonction de  $x$ . Le détail de ces

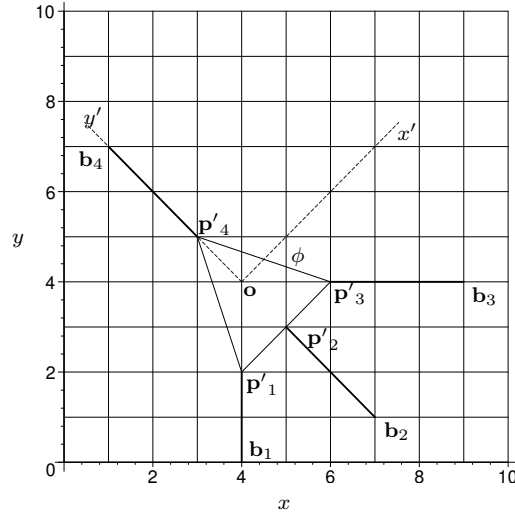


Figure 5.8: Position singulière, exemple 3

fonctions est trop long pour être exprimé ici. Sur demande, un format électronique est disponible.

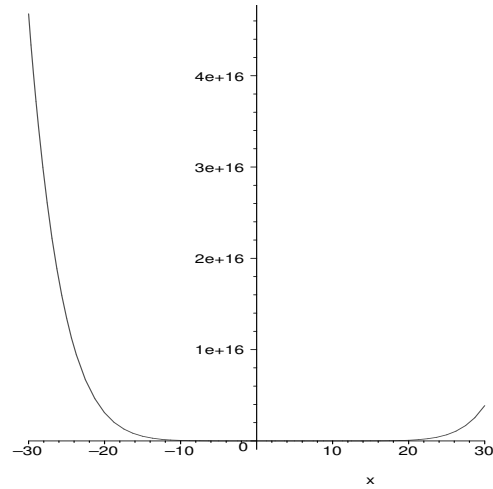
La forme de  $a$  est la suivante :

$$a = f_1(x) + f_2(x)\sqrt{-f_3(x)(x-4)^4}$$

Où  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  et  $f_3(x)$  sont des fonctions de  $x$ .

Ainsi, pour obtenir des valeurs réelles de  $a$ , donc de  $y$ ,  $-f_3(x-4)^4$  doit être positif ou nul. Comme le montre la figure 5.9, la fonction  $f_3$  est toujours positive. Puisque la puissance de  $(x-4)^4$  est paire, cette partie de l'expression sera aussi toujours positive, ou égale à zéro dans le cas où  $x = 4$ . La seule valeur qui admet une réponse non négative pour l'expression sous le radical est donc  $x = 4$ .

Pour cette valeur, on obtient les résultats suivants :

Figure 5.9:  $f_3$ 

$$a = 4$$

$$b = 0$$

$$c = -32$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression des racines, on trouve seulement  $y = 4$  comme valeur réelle.

Alors, le seul point qui satisfait l'équation des lieux de singularité est  $(4, 4)$ .

### 5.2.2 Cas avec droite de singularité dans $xy$

Cet autre exemple de manipulateur plan à actionnement redondant à 3 degrés de liberté montre le cas où la solution est une droite dans le plan  $xy$ . Le schéma d'un tel manipulateur est présenté à la figure 5.10.

Les vecteurs décrivant les points d'attache des segments à la base et à l'effecteur sont :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

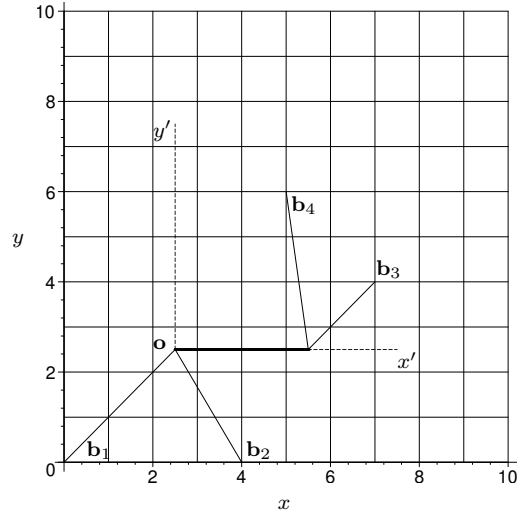


Figure 5.10: Manipulateur plan à 3ddl, exemple 4

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}'_3 = \mathbf{p}'_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'angle d'orientation de la plate-forme pour lequel les lieux de singularité seront recherchés est choisi arbitrairement :

$$\phi = \frac{3}{4} \pi$$

### 5.2.2.1 Méthode des parties

Quatre parties sont formées, en retirant tour à tour chacun des segments du robot. En appliquant à chacune des parties formées la méthode reconnue pour obtenir les lieux de singularité de manipulateurs parallèles non redondants, on obtient les équations de droites suivantes, représentées à la figure 5.11 :

$$\begin{aligned}
L_1 &= -3\sqrt{2}x^2 - 3\sqrt{2}y^2 - 6\sqrt{2}xy + 45\sqrt{2}x + \\
&\quad \left(9 - \frac{1}{2}(9\sqrt{2} - 66)\sqrt{2} + 12\sqrt{2}\right)y - 132\sqrt{2} = 0 \\
L_2 &= -3\sqrt{2}x^2 - 3\sqrt{2}y^2 - 6\sqrt{2}xy + 33\sqrt{2}x + \left(9 - \frac{1}{2}(9\sqrt{2} - 66)\sqrt{2}\right)y = 0 \\
L_3 &= -6\sqrt{2}y^2 - 6\sqrt{2}xy + 66\sqrt{2}y = 0 \\
L_4 &= -6\sqrt{2}y^2 - 6\sqrt{2}xy + 66\sqrt{2}y = 0
\end{aligned}$$

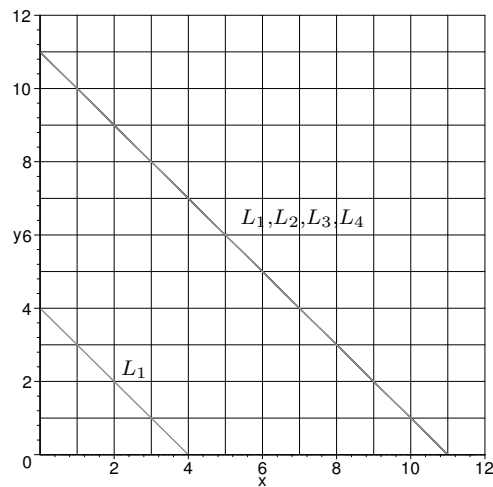


Figure 5.11: Lieux de singularité des parties, exemple 4

Seule la droite d'équation  $y = -x + 11$  est commune aux quatre lieux. Ainsi, une singularité se produira lorsque l'effecteur, orienté selon un angle de  $\phi = \frac{3\pi}{4}$ , sera placé sur cette droite. Cette situation est illustrée à la figure 5.12

Dans l'espace  $xy\phi$  ce manipulateur présente deux droites de singularité. La première est décrite par l'équation  $y = -x + 11$  quand  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  et l'autre par  $y = 0$  quand  $\phi = 0$ .

### 5.2.2.2 Méthode de la multiplication de la matrice jacobienne A

Pour l'angle  $\phi = \frac{3\pi}{4}$ , l'équation obtenue par la méthode de la multiplication de la matrice jacobienne est :

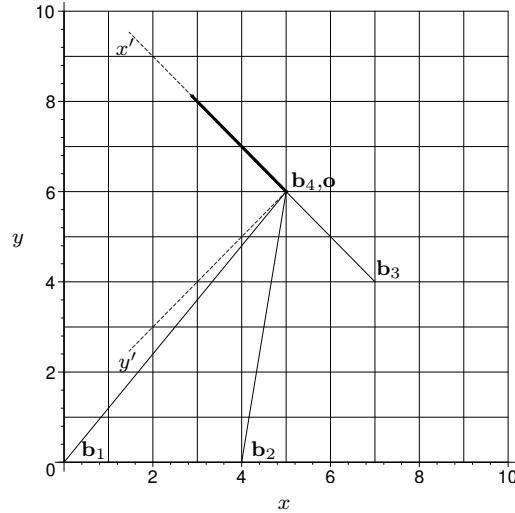


Figure 5.12: Position singulière, exemple 4

$$\begin{aligned}
 &36x^4 + 180y^4 + 144x^3y + 432y^3x + 360y^2x^2 - \\
 &\quad 936x^3 - 4104y^3 - 2808yx^2 - 5976y^2x + \\
 &\quad 7812x^2 + 25236y^2 + 15624xy - \\
 &\quad 23760x - 23760y + 34848 = 0
 \end{aligned}$$

Les racines  $y$  de ce polynôme sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 &y = 11 - x \quad (\text{racine double}) \\
 &y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{-x^2 + 4x - 9} \quad (\text{racines complexes})
 \end{aligned}$$

Ainsi, seule la droite d'équation  $y = 11 - x$  vérifie ce polynôme.

## 5.3 Manipulateurs à 6 ddl

### 5.3.1 Cas simplifié

Voici un exemple de calcul de lieux de singularité pour un manipulateur à 6 degrés de liberté. L'approche des parties a été utilisée. Le robot est illustré à la figure 5.13.

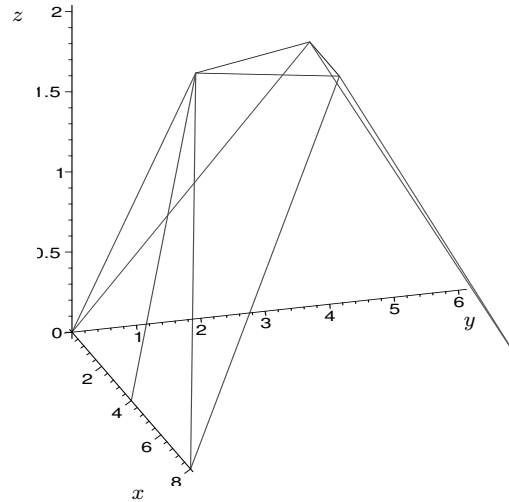


Figure 5.13: Manipulateur à 6 ddl, exemple 6

Les positions des points d'attache des segments à la base et à l'effecteur sont données par :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_6 = \mathbf{b}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}'_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}'_3 = \mathbf{p}'_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}'_5 = \mathbf{p}'_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'orientation de l'effecteur est donnée, selon la convention des angles d'Euler  $(\mathbf{Q}_z, \mathbf{Q}_y, \mathbf{Q}_x)$  :



$$\psi = 0 \quad \theta = 0 \quad \phi = \frac{\pi}{6}$$

La méthode des parties est employée. Chaque partie étant associée à un manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté classique, les lieux de singularité de chacune des parties peuvent être calculés de manière conventionnelle. Cela amène le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} L_1 &= -4229.32 z^3 + 3812.43 z^2 y - 768 y^2 z - \\ &\quad 384 y^2 - 0133.29 z^2 + 5938.22 yz - 3991.81 z + 2016 y = 0 \\ L_2 &= -2949.66 z^3 + 1906.22 z^2 y - 384 y^2 z - \\ &\quad 192 y^2 - 4566.65 z^2 + 2969.11 yz - 1745.91 z + 1008 y = 0 \\ L_3 &= 0 \\ L_4 &= 0 \\ L_5 &= 0 \\ L_6 &= 0 \\ L_7 &= 2949.66 z^3 - 1906.22 z^2 y + 384 y^2 z + \\ &\quad 192 y^2 + 4566.65 z^2 - 2969.11 yz + 1745.91 z - 1008 y = 0 \end{aligned}$$

Aucune de ces équations ne dépend de  $x$ . La racine en  $z$  de chacun de ces polynômes est évaluée pour chaque  $L_i$ . Dans tous les cas, les solutions obtenues sont ;

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{3}}{3} y \\ z &= -\frac{1}{2} \\ z &= \frac{21}{2} - 7\sqrt{3} - 2y + \frac{4\sqrt{3}}{3}y \end{aligned}$$

Ces équations représentent les lieux de singularité du manipulateur pour l'orientation prescrite. Un exemple de position singulière est illustré à la figure 5.14.

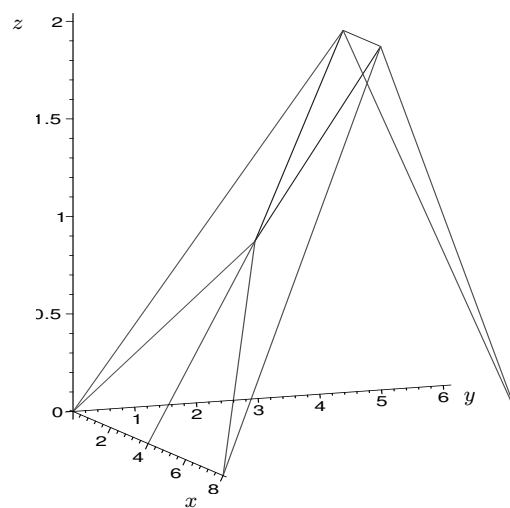


Figure 5.14: Position singulière, exemple 6

# Conclusion

L'actionnement redondant est envisagé pour éliminer les lieux de singularité des manipulateurs parallèles tout en conservant les avantages de ceux-ci. Pour contrôler cette propriété, l'expression des lieux de singularité des manipulateurs parallèles à actionnement redondant est nécessaire.

Deux approches ont été utilisées pour analyser cette question. La première, la méthode de la multiplication de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , consiste à manipuler l'équation des vitesses du robot pour en dégager les cas où elle dégénère. La seconde, la méthode des parties, se base sur la connaissance des lieux de singularité des manipulateurs parallèles non-redondants. Ces méthodes ont été appliquées pour des manipulateurs comportant seulement des actionneurs prismatiques, à 2, 3 et 6 degrés de liberté.

Dans chaque cas, les lieux de singularité ont pu être représentés. Par contre, les résultats obtenus comportent certaines limites. Pour obtenir des expressions plus simples, l'orientation de l'effecteur a été fixée, les expressions obtenues sont parfois tout de même très lourdes. De plus, ils ne permettent pas aisément de définir des critères de conception.

Les exemples ayant montré que les lieux de singularité perdent une dimension avec l'ajout d'un actionneur redondant, poursuivre cette étude amènerait certainement des possibilités intéressantes. En effet, il serait approprié d'étendre les résultats obtenus à

d'autres cas : articulations différentes, plus de redondance, etc... De plus, des approches différentes peuvent être tentées, soit plus numérique ou plus géométrique. Enfin, il faudra prévoir la commande de ces mécanismes.

# Bibliographie

- [1] Gosselin, C. et Angeles, J., 1990, Singularity analysis of closed-loop kinematic chains, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **Vol. 6, No 3**, pp 281-290.
- [2] Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C.M. , 1996, Singularity analysis and representation of spatial six-dof parallel manipulators, *Proceedings of the 5th Recent Advances in Robot Kinematics*, pp 389-398.
- [3] Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C.M. , 1997, Problème géométrique direct et lieux de singularité des manipulateurs parallèles plans à trois degrés de liberté, Département de génie mécanique, Université Laval, Québec, Québec, Canada, 5 juin.
- [4] Mayer St-Onge, B., 1997, Étude et représentation des lieux de singularité de la plate-forme de gough-stewart, Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Québec, Canada, janvier
- [5] Mayer St-Onge, B. et Gosselin, C.M. , 2000, Singularity Analysis and Représentation of the general Gough-Stewart Platform, *The International Journal of Robotics Research*, **Vol. 19, No 3**, pp 271-288.
- [6] Merlet, J.-P., 1990, Les robots parallèles, *Traité des nouvelles technologies*, Série robotique, Edition HERMES, France.
- [7] Sefrioui, J. et Gosselin, C., 1993, Singularity analysis and representation of planar parallel manipulators, *Journal of Robotics Research*, **Vol. 1, No 1**, pp 4-17.

- [8] Sefrioui, J. et Gosselin, C., 1994, Étude et représentation des lieux de singularité des manipulateurs parallèles sphériques à trois degrés de liberté avec actionneurs prismatiques, *Mechanism and Machine Theory*, **Vol. 29, No 4**, pp 559-579.
- [9] Sefrioui, J. et Gosselin, C., 1995, On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators, *Mechanism and machine theory*, **Vol. 30, No 4**, pp 533-551.

# Annexe A

## Expression des coefficients

Cette annexe présente les expressions des coefficients des équations de lieux de singularité obtenus par la méthode de la multiplication de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ . Il est à noter que ces coefficients ne sont pas nécessairement présentés selon leur expression la plus simple.

### A.1 Manipulateur à 2 degrés de liberté

#### A.1.1 Expression du déterminant de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Soit les coefficients de l'expression :

$$F_1 x^2 + F_2 y^2 + F_3 xy + F_4 x + F_5 y + F_6 = 0$$

$$F_1 = -2 B_{y_2} B_{y_3} - 2 B_{y_1} B_{y_3} - 2 B_{y_1} B_{y_2} + 2 B_{y_1}^2 + 2 B_{y_2}^2 + 2 B_{y_3}^2$$

$$F_2 = -2 B_{x_1} B_{x_3} - 2 B_{x_2} B_{x_3} - 2 B_{x_1} B_{x_2} + 2 B_{x_1}^2 + 2 B_{x_2}^2 + 2 B_{x_3}^2$$

$$F_3 = -4 B_{x_1} B_{y_1} + 2 B_{x_1} B_{y_2} + 2 B_{y_3} B_{x_1} + 2 B_{x_2} B_{y_1} -$$

$$4 B_{x_2} B_{y_2} + 2 B_{x_2} B_{y_3} + 2 B_{x_3} B_{y_1} + 2 B_{x_3} B_{y_2} - 4 B_{x_3} B_{y_3}$$

$$F_4 = -2 B_{x_2} B_{y_1}^2 - 2 B_{x_3} B_{y_1}^2 - 2 B_{x_2} B_{y_3}^2 - 2 B_{x_3} B_{y_2}^2 - 2 B_{x_1} B_{y_2}^2 - 2 B_{x_1} B_{y_3}^2 +$$

$$2 B_{y_1} B_{x_2} B_{y_2} + 2 B_{y_1} B_{x_3} B_{y_3} + 2 B_{x_1} B_{y_1} B_{y_2} + 2 B_{x_1} B_{y_1} B_{y_3} + 2 B_{y_2} B_{x_3} B_{y_3} +$$

$$2 B_{x_2} B_{y_2} B_{y_3}$$

$$F_5 = -2 B_{x_1}^2 B_{y_3} - 2 B_{x_2}^2 B_{y_3} - 2 B_{x_2}^2 B_{y_1} - 2 B_{x_3}^2 B_{y_2} - 2 B_{x_1}^2 B_{y_2} + 2 B_{x_3} B_{y_3} B_{x_1} +$$

$$2 B_{x_1} B_{x_2} B_{y_2} + 2 B_{x_1} B_{y_1} B_{x_2} + 2 B_{x_1} B_{y_1} B_{x_3} + 2 B_{x_2} B_{x_3} B_{y_3} + 2 B_{x_2} B_{y_2} B_{x_3} -$$

$$2 B_{x_3}^2 B_{y_1}$$

$$F_6 = B_{x_1}^2 B_{y_2}^2 + B_{x_1}^2 B_{y_3}^2 + B_{x_2}^2 B_{y_1}^2 + B_{x_2}^2 B_{y_3}^2 + B_{x_3}^2 B_{y_1}^2 +$$

$$B_{x_3}^2 B_{y_2}^2 - 2 B_{x_1} B_{y_1} B_{x_2} B_{y_2} - 2 B_{x_1} B_{y_1} B_{x_3} B_{y_3} - 2 B_{x_2} B_{y_2} B_{x_3} B_{y_3}$$

## A.2 Manipulateur à 3 degrés de liberté

### A.2.1 Expression du déterminant de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Soit les coefficients de l'expression :

$$F_1 x^4 + F_2 y^4 + F_3 x^3 y + F_4 x y^3 + F_5 x^2 y^2 + F_6 x^3 + F_7 y^3 + F_8 x^2 y + F_9 x y^2 + F_{10} x^2 + F_{11} y^2 + F_{12} x y + F_{13} x + F_{14} y + F_{15} = 0$$



$$\begin{aligned}
F_1 &= M_1 \cos^2(\phi) + M_2 \sin^2(\phi) + M_3 \cos(\phi) \sin(\phi) \\
F_2 &= M_4 \cos^2(\phi) + M_5 \sin^2(\phi) + M_6 \cos(\phi) \sin(\phi) \\
F_3 &= M_7 \cos^2(\phi) + M_8 \sin^2(\phi) + M_9 \cos(\phi) \sin(\phi) \\
F_4 &= M_{10} \cos^2(\phi) + M_{11} \sin^2(\phi) + M_{12} \cos(\phi) \sin(\phi) \\
F_5 &= M_{13} \cos^2(\phi) + M_{14} \sin^2(\phi) + M_{15} \cos(\phi) \sin(\phi) \\
F_6 &= M_{16} \cos^3(\phi) + M_{17} \sin^3(\phi) + M_{18} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + M_{19} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + \\
&\quad M_{20} \cos^2(\phi) + M_{21} \sin^2(\phi) + M_{22} \sin(\phi) \cos(\phi) \\
F_7 &= M_{23} \cos^3(\phi) + M_{24} \sin^3(\phi) + M_{25} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + M_{26} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + \\
&\quad M_{27} \cos^2(\phi) + M_{28} \sin^2(\phi) + M_{29} \sin(\phi) \cos(\phi) \\
F_8 &= M_{30} \cos^3(\phi) + M_{31} \sin^3(\phi) + M_{32} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + M_{33} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + \\
&\quad M_{34} \cos^2(\phi) + M_{35} \sin^2(\phi) + M_{36} \sin(\phi) \cos(\phi) \\
F_9 &= M_{37} \cos^3(\phi) + M_{38} \sin^3(\phi) + M_{39} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + M_{40} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + \\
&\quad M_{41} \cos^2(\phi) + M_{42} \sin^2(\phi) + M_{43} \sin(\phi) \cos(\phi) \\
F_{10} &= M_{44} \cos^4(\phi) + M_{45} \sin^4(\phi) + M_{46} \sin(\phi) \cos^3(\phi) + M_{47} \cos(\phi) \sin^3(\phi) + \\
&\quad M_{48} \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + M_{49} \cos^3(\phi) + M_{50} \sin^3(\phi) + M_{51} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + \\
&\quad M_{52} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + M_{53} \cos^2(\phi) + M_{54} \sin^2(\phi) + M_{55} \sin(\phi) \cos(\phi) \\
F_{11} &= M_{56} \cos^4(\phi) + M_{57} \sin^4(\phi) + M_{58} \sin(\phi) \cos^3(\phi) + M_{59} \cos(\phi) \sin^3(\phi) + \\
&\quad M_{60} \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + M_{61} \cos^3(\phi) + M_{62} \sin^3(\phi) + M_{63} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + \\
&\quad M_{64} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + M_{65} \cos^2(\phi) + M_{66} \sin^2(\phi) + M_{67} \sin(\phi) \cos(\phi) \\
F_{12} &= M_{68} \cos^4(\phi) + M_{69} \sin^4(\phi) + M_{70} \sin(\phi) \cos^3(\phi) + M_{71} \cos(\phi) \sin^3(\phi) + \\
&\quad M_{72} \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + M_{73} \cos^3(\phi) + M_{74} \sin^3(\phi) + M_{75} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + \\
&\quad M_{76} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + M_{77} \cos^2(\phi) + M_{78} \sin^2(\phi) + M_{79} \sin(\phi) \cos(\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{13} &= M_{80} \cos^5(\phi) + M_{81} \sin^5(\phi) + M_{82} \cos^4(\phi) \sin(\phi) + M_{83} \sin^4(\phi) \cos(\phi) + \\
&\quad M_{84} \cos^3(\phi) \sin^2(\phi) + M_{85} \sin^3(\phi) \cos^2(\phi) + M_{86} \cos(\phi)^4 + M_{87} \sin^4(\phi) + \\
&\quad M_{88} \sin(\phi) \cos^3(\phi) + M_{89} \cos(\phi) \sin^3(\phi) + M_{90} \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + M_{91} \cos^3(\phi) + \\
&\quad M_{92} \sin^3(\phi) + M_{93} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + M_{94} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + M_{95} \cos^2(\phi) + \\
&\quad M_{96} \sin^2(\phi) + M_{97} \sin(\phi) \cos(\phi) \\
F_{14} &= M_{98} \cos^5(\phi) + M_{99} \sin^5(\phi) + M_{100} \cos^4(\phi) \sin(\phi) + M_{101} \sin^4(\phi) \cos(\phi) + \\
&\quad M_{102} \cos^3(\phi) \sin^2(\phi) + M_{103} \sin^3(\phi) \cos^2(\phi) + M_{104} \cos^4(\phi) + M_{105} \sin^4(\phi) + \\
&\quad M_{106} \sin(\phi) \cos^3(\phi) + M_{107} \cos(\phi) \sin^3(\phi) + M_{108} \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) + \\
&\quad M_{109} \cos^3(\phi) + M_{110} \sin^3(\phi) + M_{111} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + M_{112} \sin^2(\phi) \cos(\phi) + \\
&\quad M_{113} \cos^2(\phi) + M_{114} \sin^2(\phi) + M_{115} \sin(\phi) \cos(\phi) \\
F_{15} &= M_{116} \cos^4(\phi) + M_{117} \cos^3(\phi) \sin(\phi) + M_{118} \cos^3(\phi) + \\
&\quad M_{119} \cos^2(\phi) \sin(\phi) + M_{120} \cos^2(\phi) + M_{121} \cos(\phi) \sin(\phi) + \\
&\quad M_{122} \cos(\phi) + M_{123} \sin(\phi) + M_{124}
\end{aligned}$$

Les constantes  $M_1$  à  $M_{124}$  sont des fonctions des paramètres géométriques du manipulateur. En raison de la longueur de leur expression, qui atteint souvent les quelques pages, ces coefficients ne sont pas exposés en détail ici, mais sont disponibles sous forme électronique sur demande.

# Annexe B

## Analyse de la valeur du signe de l'expression sous le radical dans l'équation 2.12

La valeur du signe de l'expression sous le radical dans l'équation 2.12 est significative. En effet, une valeur négative implique l'absence de lieux de singularité, une valeur égale à 0 conduit à une droite de singularité et une valeur positive amènerait l'équation d'un lieu de singularité. Par des exemples, il a été possible de constater que les deux premiers cas sont possibles. Il sera montré ici que le troisième cas ne se produit jamais.

L'expression sous le radical a la forme suivante :

$$E = (F_3x + F_5)^2 - 4F_2(F_1x^2 + F_4x + F_6)$$

Celle-ci peut être exprimée de la forme générale d'une équation de degré 2 :

$$E = ax^2 + bx + c$$

où

$$a = F_3^2 - 4F_2F_1$$

$$b = 2F_3F_5 - 4F_2F_4$$

$$c = F_5^2 - 4F_2F_6$$

Un changement de repère permet d'étudier toutes les valeurs possibles de  $a$ ,  $b$  et  $c$  par rapport à deux paramètres seulement. Ce changement de repère est possible puisque la présence de singularité est relié à la position relative des éléments géométriques du robot et non à la position du repère. L'expression du lieu sera donnée dans un autre repère, mais le lieu est physiquement le même. Si l'expression des lieux de singularité n'admet aucune solution dans un repère, elle n'en admettra dans aucun.

Puisque les trois points d'attache des segments à la base sont situés dans un plan, ils décrivent nécessairement un cercle, si on exclut le cas où les trois points forment une droite, ce cas ayant déjà été traité au chapitre 2. Le nouveau repère est attaché au centre de ce cercle. De plus, il est orienté de façon à obtenir  $\theta_1 = 0$ , comme il l'est illustré à la figure B.1.

Tous les points d'attaches sont donnés par le vecteur  $\mathbf{b}_i$  :

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} R \cos(\theta_i) \\ R \sin(\theta_i) \end{bmatrix}$$

Ainsi, les coefficients s'expriment par les fonctions suivantes :

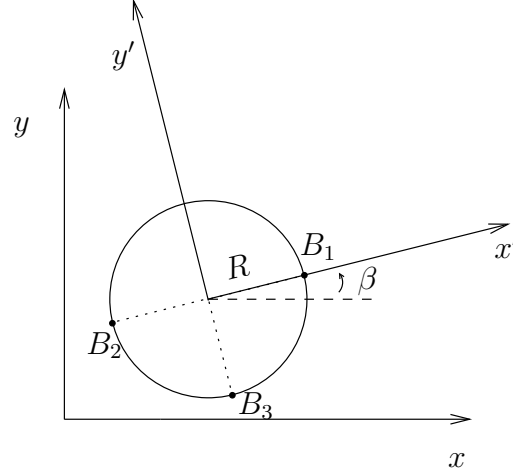


Figure B.1: Changement de repère

$$a = 24R^4 [\cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - 1 - \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) + \cos^2(\theta_3) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) + \cos^2(\theta_3) + \cos^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_2) \cos(\theta_3) - \cos(\theta_2) \cos^2(\theta_3) - \cos^2(\theta_2) \cos^2(\theta_3)]$$

$$b = -16R^5 [-\cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) - 1 - \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) + \cos(\theta_3) + \cos(\theta_2) - \cos^2(\theta_2) \cos(\theta_3) - \cos(\theta_2) \cos^2(\theta_3) + \cos^2(\theta_2) \cos^2(\theta_3) + \cos^2(\theta_2) \cos^3(\theta_3) + \cos^3(\theta_2) \cos^2(\theta_3) - \cos(\theta_2) \cos^3(\theta_3) - \cos^3(\theta_2) \cos(\theta_3) + 2 \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) + \cos^2(\theta_2) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) - \sin(\theta_3) \cos^2(\theta_3) \sin(\theta_2)]$$

$$c = 8R^6 [-1 - \cos^2(\theta_2) \cos^3(\theta_3) - \cos^3(\theta_2) \cos^2(\theta_3) - \cos(\theta_2) \cos^4(\theta_3) - \cos^4(\theta_2) \cos(\theta_3) + \cos^4(\theta_2) \cos^2(\theta_3) + \cos^2(\theta_2) \cos^4(\theta_3) - \cos^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_3) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos^2(\theta_3) \sin(\theta_2) + \cos^3(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos^3(\theta_3) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos^2(\theta_2) \sin(\theta_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_3) \cos^2(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos^3(\theta_2) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) - \sin(\theta_3) \cos^3(\theta_3) \sin(\theta_2) + \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) + \cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_3) + \cos^3(\theta_2) + \cos^3(\theta_3) - \sin(\theta_3) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2) + \cos^2(\theta_2) \sin(\theta_3) \sin(\theta_2)]$$

Puisque  $R$  est toujours positif,  $a$ ,  $b$  et  $c$  ont toujours la même valeur de signe que respectivement  $a/R^4$ ,  $b/R^5$  et  $c/R^6$ . Les figures B.2, B.3 et B.4 illustrent ces dernières expressions, pour des valeurs de  $\theta_2$  et  $\theta_3$  variant de 0 à  $2\pi$ .

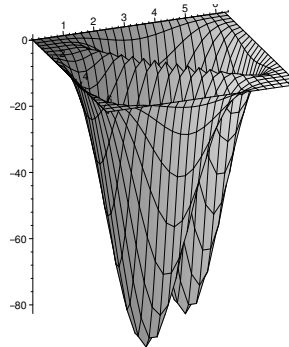


Figure B.2:  $\frac{a}{R^4}$

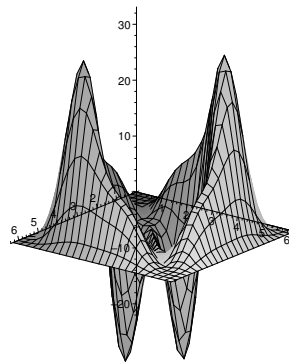


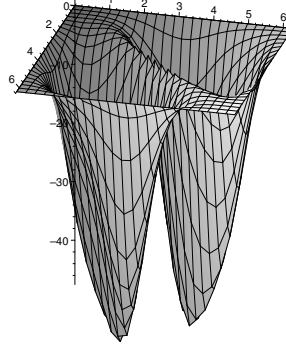
Figure B.3:  $\frac{b}{R^5}$

Deux cas peuvent alors s'observer :  $a$  est nul ou  $a$  est non-nul.

Lorsque le coefficient  $a$  est nul, les coefficients  $b$  et  $c$  le sont aussi et l'expression sous le radical vaut 0. Cela se produit lorsque  $\theta_2 = \theta_3$  ou quand l'un des deux angles égale  $\theta_1 = 0$  (ou  $2\pi$ ). Dans ces situations, les points sont colinéaires. En effet, dans le repère choisi, si deux points sont situés au même angle, ils sont confondus.

Lorsque le coefficient  $a$  est non nul, l'expression sous le radical est l'équation d'une parabole. Les racines de cette parabole sont exprimées par la relation suivante :

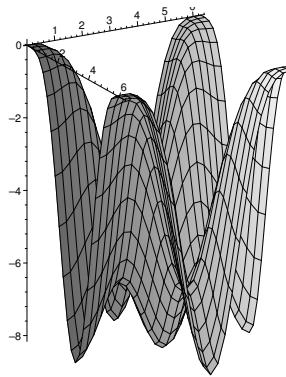
$$\text{racines} = \frac{R}{3}(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) + 1 \pm \sqrt{K})$$

Figure B.4:  $\frac{c}{R^6}$ 

où

$$K = 2(-\cos^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_3) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) + \cos(\theta_2)\cos(\theta_3))$$

Comme le montre la figure B.5, la valeur de  $K$  est toujours négative en dehors des cas où  $\theta_2 = \theta_3 = 0$  (ou  $2\pi$ ), cas qui ont été traités précédemment.

Figure B.5:  $K$ 

Comme l'expression étudiée ne comporte pas de racine réelle, son résultat sera toujours de même signe. En effet, il est impossible pour une expression continue de changer de signe sans passer par 0.

Ainsi, la valeur du signe de l'expression sous le radical sera toujours la même que celle évaluée à  $x' = 0$ , soit  $cR^6$ . Comme il l'a été montré à la figure B.4, cette valeur est toujours négative ou nulle.

Puisque l'expression sous le radical est toujours négative ou égale à 0, elle n'est jamais positive.